Project Tenji:
Mécanique

Hosted at tenji.org , contact : contact@tenji.org

Contents

Part I

Mécanique General

Chapter 1

Mécanique newtonienne

1.1 Énoncés des lois de Newton

- Loi d'inertie
  Une particule isolée, sur laquelle n'agit aucune force extérieure, reste au repos ou conserve un mouvement rectiligne uniforme.

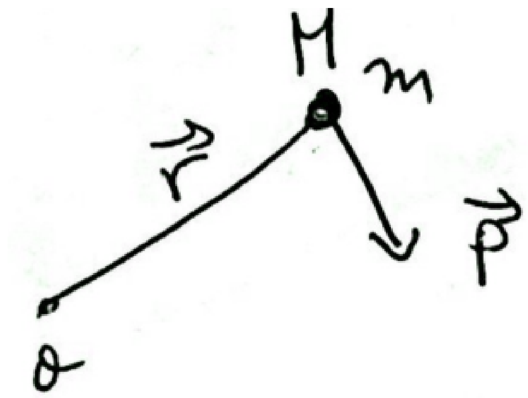
$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \iff \vec{v} = \overrightarrow{cte}}$$

- Loi fondamentale de la dynamique
  - $\vec{F} = m\vec{a}$
    * $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$
    * $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$
    * $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (O est l'origine, M est le point où $\vec{F}$ agit)
  - $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ (avec $\vec{P} = m\vec{v}$ quantité de mouvement)
- Principe de l'action et de la réaction : $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$

1.2 Loi de conservation pour un point matériel

- Conservation de la quantité de mouvement
  Si $\overrightarrow{F} = 0$, alors $\overrightarrow{F} = \dfrac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{P} = \overrightarrow{cte}$
- Conservation du moment angulaire

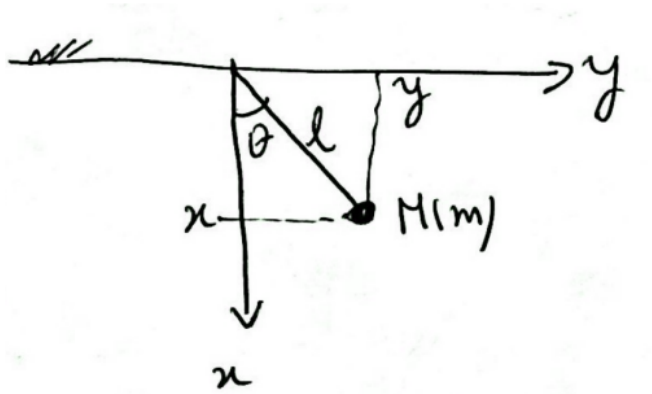
  $\overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p}$
  $\dfrac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$
  Si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \implies L = \overrightarrow{cte}$
  Si $\overrightarrow{F}$ est portée par $\overrightarrow{r} \implies \overrightarrow{L} = \overrightarrow{cte}$



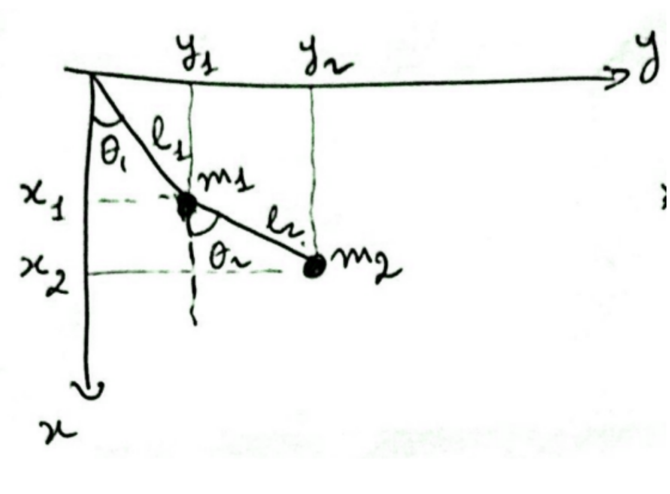
- Conservation de l'énergie mécanique totale
-
  - Théorème d'énergie cinétique
    $\Delta E_c = W$, $W = -\int \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l}$
  - Forces conservatrices
    Si $W_{ACB} = W_{ADB} \implies$ les forces extérieures sont conservatrices
  - Une condition nécessaire et suffisante pour que W_{AB} soit indépendant du chemin est que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel
    $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}(U)$ (U : énergie potentielle)

1.3 Contraintes et coordonnées généralisées

Les contraintes du système introduisent des dépendances entre les coordonnées. Les contraintes sont par exemple des hypothèses de rigidité, limitant son cadre d'évolution, etc. Exemple :

- Pendule simple 

$\boxed{x^2 + y^2 = l^2}$

- Pendule double 

$\boxed{x_1^2 + y_1^2 = l_1^2}$
$\boxed{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2}$

Système de N particules

- Aucune contrainte (indépendantes) $\Longrightarrow$ 3N coordonnées (3N degrés de liberté)
- K contraintes $\Longrightarrow$ 3N - k coordonnées indépendantes

Chapter 2

Mécanique lagrangienne

2.1 Definition d'un système holonome

Un système dans lequel on peut déduire l'état d'un système en connaissant seulement les informations sur le changement de positions des composants du système au fil du temps.

2.2 Rappel de calcule différentielle

Soit f une fonction de N variables $f = f(r_1 \dots, r_N)$

- la différentielle totale de f est :
$$df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i$$

- la derive de f par rapport a l'une de ses variable (r_j) :
$$\frac{df}{dr_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dr_j}$$

- si tout les variable sont independent
$$\frac{df}{dr_j} = \frac{\partial f}{\partial r_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dr_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial r_j}$$

2.3 Equation générale de Lagrange

On considère un system holonome de N particule , d degré du liberté , avec $\overrightarrow{F_\alpha}$ est la force appliquée sur la particule α

2.3.1 L'energie cinétique est :

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} T_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\overrightarrow{r_\alpha}}^2 \text{ avec } \begin{cases} \overrightarrow{r_\alpha} = \overrightarrow{r_\alpha}(q_1, q_2, q_3 \ldots q_d, t) \\ \alpha = 1, 2, 3 \ldots N \\ q_i : \text{coordonné généralise} \\ i = 1, 2, 3 \ldots d \\ \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\overrightarrow{r_\alpha}}{dt} \end{cases}$$

$$T_\alpha = T_\alpha(\underbrace{q_1, q_2 \ldots q_d}_{\text{position}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_d}_{\text{vitess}}, \underbrace{t}_{\text{temp}})$$

2.3.2 Les forces généralisé associe a q_i

- On a : $dT = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{r_\alpha}} d\dot{r_\alpha}$ (differentielle totale de T) $\Longrightarrow \frac{dT}{d\dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{r_\alpha}} \frac{d\dot{r_\alpha}}{d\dot{q}_i}$

- Puisque les variable sont independent alors :
$$\frac{dT}{d\dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{r_\alpha}} \frac{\partial \dot{r_\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \Longrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\overrightarrow{r_\alpha}})^2) = \frac{1}{2} (\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{\overrightarrow{r_\alpha}})^2)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\overrightarrow{r_\alpha}} \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_\alpha}}}{\partial \dot{q}_i} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\overrightarrow{r_\alpha}} \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_\alpha}}}{\partial \dot{q}_i}}$$

- Chercher $\dot{\overrightarrow{r_\alpha}}$, ona :
  - $\overrightarrow{r_\alpha} = \overrightarrow{r_\alpha}(q_1, q_2 \ldots q_d, t)$
  - $\dot{\overrightarrow{r_\alpha}} = \frac{d((\overrightarrow{r_\alpha}))}{dt}$

$$d\overrightarrow{r_\alpha} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_d} dq_d + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} dt$$
$$\frac{d\overrightarrow{r_\alpha}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r_\alpha}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_d} \frac{dq_d}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}$$
$$\frac{d\overrightarrow{r_\alpha}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r_\alpha}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_d} \frac{\partial q_d}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}$$

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{r_\alpha}} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}} \text{ avec } \alpha = 1, 2 \ldots N$$

- démontrer que $\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_\alpha}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i}$
$$\dot{\overrightarrow{r_\alpha}} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial r_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \ldots + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} (q_i, t)$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = 0 \text{ car } \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} (q_i, t)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = 0 + 0 + 0 \ldots + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_i} + \ldots + 0$$
$$= \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \implies \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}}$$

- alors $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \implies \boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}}$

- Calcule de $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$

  – $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)}$

  – Calcule de $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)$

  $$d\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) dq_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) dt$$

  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right)$$

  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt}(\vec{r}_\alpha) \implies \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\dot{\vec{r}}_\alpha}$$

  – Verifier que $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$

  on a $T = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} \implies \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial}{\partial q_i}(\dot{\vec{r}}_\alpha)^2 \implies \boxed{\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_i}}$

  alors

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial}{\partial q_i}\vec{r}_\alpha}$$

- on utilise la loi de Newton : $\vec{F}_\alpha = m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \implies \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dfrac{\partial T}{\partial q_i} + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$

  avec $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = Q_i$

$$\boxed{Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}}$$

2.4 Formalisme de Lagrange : cas d un system conservatif

- Si les forces $\overrightarrow{F_\alpha}$ sont conservatif , on suppose que toutes les forces agissant sur ce system dérivent d'une mem énergie potentielle U
  avex U depend de position $U = U(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2} \ldots, \overrightarrow{r_N})$ et $\overrightarrow{F_\alpha} = -\overrightarrow{grad}U$
  Donc , on a $\boxed{\sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{F_\alpha} d\overrightarrow{r_\alpha} = -dU}$

- On a l equation de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{F_\alpha} \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = Q_i$
  avec $Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{F_\alpha} \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i} = \frac{-dU}{dq_i} \implies \boxed{Q_i = \frac{-\partial U}{\partial q_i}}$(si les forces sont conservatives)

- L'equation devien $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{-\partial U}{\partial q_i} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{-\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0$

- U depend seulment du position alors $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T - U)$
  l equation devien $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T - U)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0$

- On introduis la fonction de Lagrange (Lagrangien)

$$\boxed{L(qi, \dot{q}_i, t) = T - U}$$

T depend de vites $\dot{q}_i$ et U depend de position q_i

- L equation devient

$$\text{Equation Euler-Lagrange : } \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

2.5 Les lois de conservation

- Invariance par temps : ENERGIE
  pour le démontre :$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies$ t est un variable cyclique
  on applique Beltrami : $L - \frac{\dot{q}\partial L}{\partial \dot{q}} = cte$ ... jusqu' arrive a $U + T = cte$

- Invariance par translation : QUANTITÉ DE MOUVEMENT
  pour le démontre : si q_α est un variable cyclique $\implies \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \implies$ la quantité du mouvement $p_\alpha = cte$

- Invariance par rotation : MOMENT CINÉTIQUE
  pour le démontre : Si θ une coordonné généralisé angle est cyclique $\implies \vec{\mathfrak{L}} = cte$
  note que le moment cinétique est : $\vec{\mathfrak{L}} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

2.6 Beltrami & Moindre d'action

2.6.1 Moindre d'action

$\delta S = \int \delta L dt = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Lagrange a partir du moindre action

- Soit S est l 'action du système
  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- Le principe de moindre d'action stipule que le système évolue de la position q_1 a la position q_2 de telle façon que S est la plus petite valeur possible $\implies \delta S = 0$
  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \right] dt = 0$
- En se limitant dans le développement de Taylor de l'integrant suivant les puissance de δq et $\delta \dot{q}$ aux termes de premier ordre , on obtient :
  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}) dt = 0$
- On a : $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$
  $\implies \delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) \delta q dt = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q]_{t_1}^{t_2} = 0$
- L'integral doit être nulle pour tout δq , ceci n'est possible que si l'integrant est identiquement null

$$\implies \boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

2.6.2 Beltrami

Si t est une variable cyclique alors :
$L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Lagrange a partir de Beltrami

Identité de Beltrami : $L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cte$

$\left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cte \right) \times \frac{d}{dt}$ avec $\begin{cases} dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} \\ \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \end{cases}$

$\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \dot{q} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = 0$

$\dot{q}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\right] = 0$

$\implies \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = 0}$

2.6.3 Trajectoire du lumière

$T = \int dt = \int \frac{dl}{v} = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c} \times ndx$ avec n : indice de refraction $n(x,y)$

(On peut pas utilise Beltrami car x n'est pas un variable cyclique (n depend de x))

$\delta T = 0 \implies \int \delta\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{c} \times n\right) dx = 0$

$f(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c} \times n \implies \int \delta f dx = 0$

$\implies \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (Euler-Lagrange)

- $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{c}n\frac{1}{2}\frac{2y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ny'}{c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$

- $\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = \frac{d}{dx}n(\frac{y'}{c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}) + \frac{n}{c}\frac{d}{dx}(\frac{y'}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}})$
  $= \left(\frac{\partial n}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{dx}\right)(\frac{y'}{c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}) + \frac{n}{c}\left(\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} + y'(\frac{-1}{2})2y'y''(1+y'^2)^{\frac{-3}{2}}\right)$
  $= \left(\frac{\partial n}{\partial y}y' + \frac{\partial n}{\partial x}\right)(\frac{y'}{c\sqrt{1+y'^2}}) + \frac{ny''}{c\sqrt{1+y'^2}} - \frac{n}{c}\frac{y'^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\implies \left(\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right) \times (\sqrt{1+y'^2} \times c)$

$\implies \boxed{ny'' - \frac{\partial n}{\partial y} + y'\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{ny'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}} = 0}$

Pour n = cte $\implies ny'' - \frac{ny'^2y''}{(1+y'^2)} = 0 \implies y' = a \implies y = ax+b$

2.6.4 minimize la distance entre deux points

$T = \int dl \implies T = \int \sqrt{1+y'^2}dx\ (dl^2 = dx^2 + dy^2\ )$

$\delta T = \int \delta(\sqrt{1+y'^2})dx = 0$, Soit $f(y') = \sqrt{1+y'^2} \implies \int \delta f dx = 0$

$\implies f - y'\frac{df}{\partial y'} = cte$ (Beltrami)

$\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\partial\sqrt{1+y'^2}}{\partial y'} = cte$

$\sqrt{1+y'^2} - 2y'^2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = cte$

$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = cte \implies y' = cte \implies \boxed{y = ax+b}$

2.6.5 Minimize le temp entre deux point avec un potentiel

$T = \int dt = \int \frac{dl}{v} = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx$

D'apres la conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv^2 + mgy_m \implies 0 = mgy_m + \frac{1}{2}mv^2$ avec $y_m = -y$

$\implies \boxed{v = \sqrt{2gy}}$

$T = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$

$\delta T = \int \delta \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = 0$

$\implies \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{\partial \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}}{\partial y'} = cte$ (Beltrami)

$\implies \frac{1}{\sqrt{2gy}} (\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}) = cte$

$\implies \boxed{1 + y'^2 = \frac{cte}{y}}$

Chapter 3

Mécanique des fluides

3.1 Hydrostatique

L'hydrostatique est un branche de la physique qui traite des caractéristiques des fluides au repos.

3.1.1 La Pression

La pression est une mesure de la force exercée sur une unité de surface.

- La Pression : $P = \dfrac{\text{Force}}{Surface} = \dfrac{F}{A}$, unite : Pascal (Pa)

- La Pression a un profond h dans un fluid est : $P = \rho g h$ avec ρ est la mass volumique de fluid

- La Pression atmosphérique est $P_0 = 1atm = 1.013 \times 10^5 Pa$

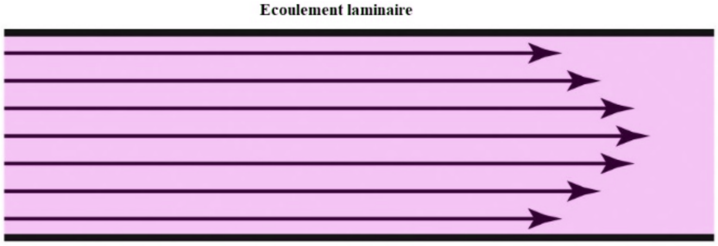
3.1.2 Loi d'Archimède

Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale vers le haut égale au poids du volume de liquide déplacé
$B = \rho_{\text{fluid}} g V_{\text{volume de l'objet}}$

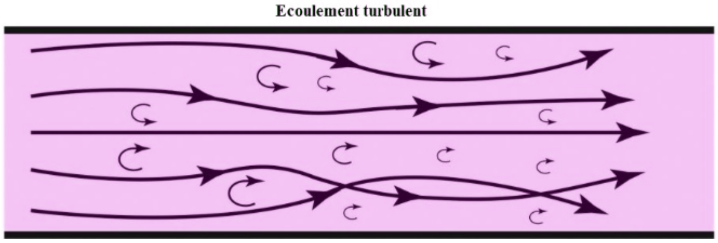
3.2 Hydrodynamique

L'hydrodynamique est un branche de la physique qui a pour objet l'étude des liquides en mouvement.

3.3 Definitions



- Écoulement laminaire :
  Dans un écoulement laminaire, deux particules de fluide voisines à un instant donné restent voisines aux instants suivants.



- Écoulement turbulent :
  l'écoulement turbulent est le mouvement irrégulier des particules du fluide. L'écoulement est chaotique, présentant des tourbillons et une forte instabilité.

- Viscosité : c'est la degré de frottement interne d'un fluide.

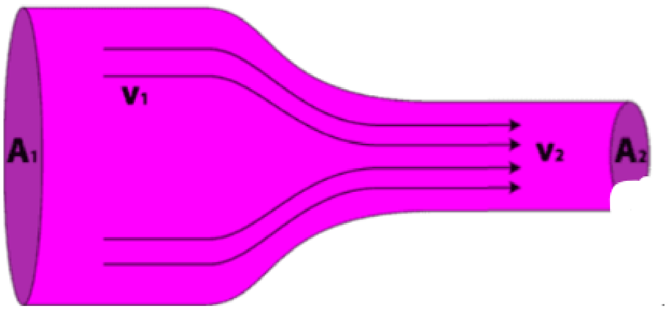
3.4 Écoulement ideal

Pour l'écoulement sera ideal :

- le fluid est non visqueux (fortement interne negligible)
- le fluid est stationer (vites a chaque point reste constant)
- le fluid incompressible (ρ rest constant)
- le fluid irrotationnel (fluide ne possède pas un moment angulaire)

3.4.1 Debit

- Debit volumique :
  $D_v = \dfrac{\text{Volume}}{\text{Temp}} = \dfrac{\text{Surface} \times \text{Longuer}}{\text{Temp}} = \text{Vitess du fluid} \times \text{Surface} = V \times A$
- Debit massique :
  $D_m = \dfrac{\text{mass}}{\text{Temp}} = \dfrac{\text{mass volumique} \times \text{Volume}}{\text{Temp}} = \dfrac{\text{mass volumique} \times \text{Surface} \times \text{Longuer}}{\text{Temp}} = V \times \rho \times A$

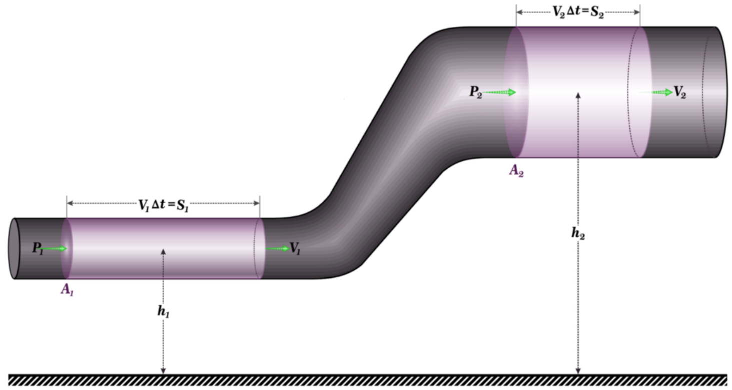


- Equation de Continuité de Debit :
  $A_1V_1 = A_2V_2$

3.5 Equation de Bernoulli

Dans le flux d'un fluide homogène et incompressible soumis uniquement aux forces de pression et de pesanteur, une accélération se produit simultanément avec la diminution de la pression.

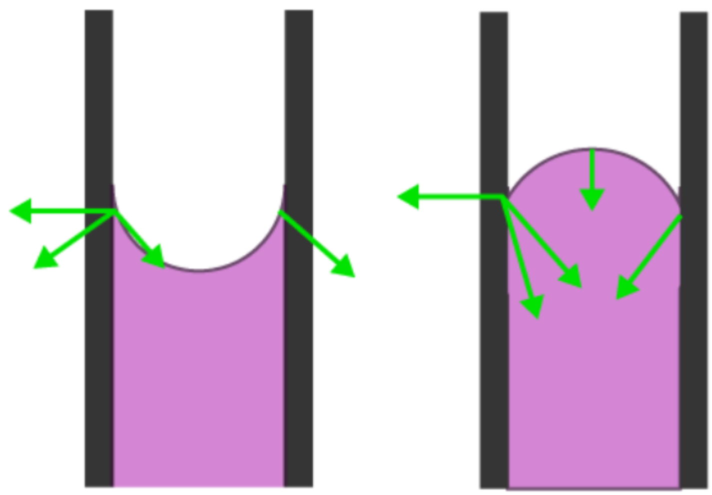
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g y_2$$



3.6 Tension du surface

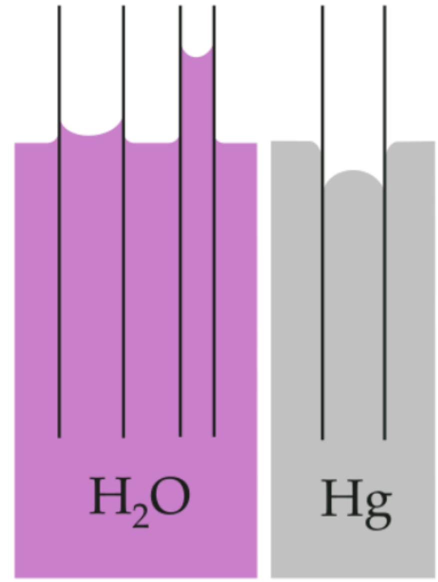
- La force <u>cohesives</u> est la force d'attraction entre les molecule de meme fluid .
- La force <u>adhesive</u> est la force d'attraction entre les molecule de fluid et une surface en contact avec ce fluid .

- Lorsque la force cohesive du fluid est plus grand que cell adhesives avec la paroi , le fluid se concave ver le bas pour reduire le contact avec le paroi
- Lorsque la force adhesive avec la paroi est plus grand que cell cohesive du fluid , le fluid est plus attire par la paroi que par lui meme , le fluid se concave ver le haut .



3.6.1 Capillarité

est le processus d'écoulement d'un liquide dans un espace étroit sans aide , ou même en opposition à des forces extérieures comme la gravité.



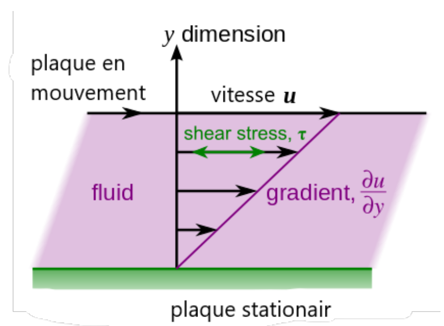
L'hauteur de colone du liquide est : $h = \dfrac{2\gamma\cos(\theta)}{\rho g r}$
avec :

- γ : est la tension du surface entre le fluid et l'air .
- θ : est l'angle de contact .
- ρ : est la densite de fluid
- r : est le rayon du tube .

3.7 Coefficient de viscosité

La viscosité dynamique est une grandeur physique qui caractérise la résistance à l'écoulement laminaire d'un fluide.

La magnitude de force F agissant sur le plaque supérieur varie proportionnel avec la vitesse (u) et la surface (A) de chaque plaque et inversement proportionnel a la distance de separation entre les plaque y

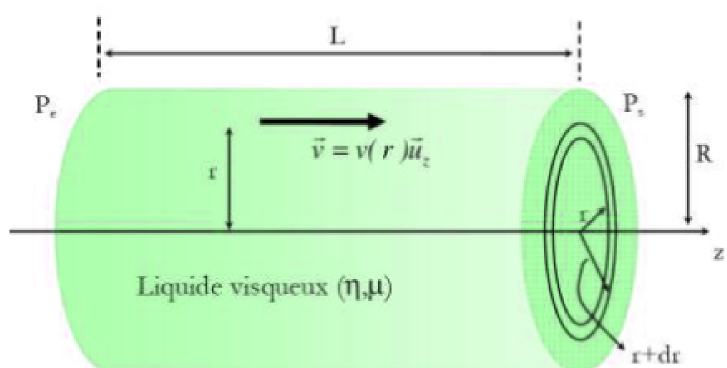


$$F = \frac{\mu \times A \times V = u}{y}$$

avec μ : est le coefficient de viscosité

3.8 Loi de Poiseuille

Le loi de Poiseuille décrit l'écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique



Debit Volumique : $D_v = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{\pi R^4 (P_e - P_s)}{8\mu L}$

3.9 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

$$R = \frac{VL\rho}{\mu} \qquad \begin{cases} R < 2000 \implies \text{ecoulement laminaire} \\ 2000 < R < 3000 \implies \text{ecoulement instable} \\ 3000 < R \implies \text{ecoulement turbulent} \end{cases}$$

avec :

- V : vitesse du fluide
- L : Dimension caractéristique(longueur de la plaque , diamètre intérieur du tube ...)
- μ : Coefficient de viscosité .
- ρ : masse volumique

3.10 Diffusion

Le Diffusion est le déplacement des molecule de region plus concentré a une region moins concentre .
Debit de diffusion : $\Phi = DA(\frac{C_2 - C_1}{L})$ avec :

- A : surface
- D : Coefficient de diffusion
- C : concentration
- L : Distance entre C_1 et C_2

3.11 Loi de Stokes

La force de viscosité sur une petite sphère se déplaçant à travers un fluide visqueux est donnée par $\boxed{F = 6\pi\mu r v}$ avec

- r : le rayon du sphere
- v : : le vitesse de sphere